

## ĐI TÌM NGHIỆM BÀI TOÁN TỐI ƯU NỬA ĐẠI SỐ DẠNG TỔNG QUÁT



PGS.TS Phạm Tiến Sơn (Trường Đại học Đà Lạt) đã được trao Giải thưởng chính Giải thưởng Tạ Quang Bửu năm 2020 với công trình *Generic properties for semialgebraic programs* (Các tính chất tổng quát của quy hoạch nửa đại số), đăng trên Tạp chí SIAM Journal on Optimization, tập 27, số 3, trang 2061-2084, năm 2017 (đồng tác giả là GS Gue Myung Lee, Đại học Quốc gia Pukyong, Hàn Quốc). Công trình này nghiên cứu một vấn đề cơ bản của toán học và ứng dụng của nó, đó là bài toán tối ưu nửa đại số.

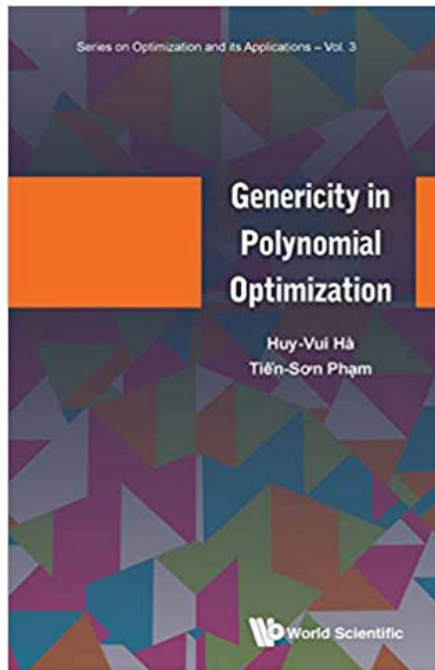
### Gần 3 thập niên làm toán

PGS.TS Phạm Tiến Sơn (giảng viên Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Đà Lạt) - một trong hai tác giả của Giải thưởng Tạ Quang Bửu năm 2020 (hạng mục Giải thưởng chính) - đã có gần 3 thập niên làm toán. Để dành trọn thời gian cho Toán học, anh thậm chí phải xin từ chức Trưởng Khoa Toán - Tin để chuyên tâm làm nghiên cứu.

Theo đuổi lĩnh vực chuyên môn rất hẹp của toán học đó là *tối ưu nửa đại số*, PGS.TS Phạm Tiến Sơn gần như đơn độc trên con đường nghiên cứu của mình, bởi ở Việt Nam hầu như không có ai nghiên cứu về lĩnh vực này. Để trao đổi học thuật, cập nhật kiến thức trong và ngoài nước, từ năm 2007 anh và các đồng nghiệp đã tạo lập và duy trì môi trường

học thuật bằng cách mỗi tuần tổ chức một buổi sinh hoạt chuyên môn vào thứ tư sau giờ giảng. Các buổi sinh hoạt này đã thực sự trở thành nơi trao đổi chuyên môn không chỉ của các giáo viên dạy toán trong trường mà còn cả các nhà nghiên cứu trong nước và quốc tế. Qua đó, TS Phạm Tiến Sơn đã liên tục cập nhật cho mình các kiến thức về lĩnh vực mà anh đang nghiên cứu và cả những hình dung về khó khăn trên con đường mà anh đã lựa chọn. Anh thường xuyên công bố các công trình cộng tác với các đồng nghiệp là chuyên gia toán ở trong nước (Hà Nội, Quy Nhơn) và quốc tế (Australia, Hàn Quốc, Mỹ, Nhật Bản, Pháp, Trung Quốc). Tính đến nay anh đã là đồng tác giả của một sách chuyên khảo (do nhà xuất bản quốc tế phát hành) và hơn 50 công trình

nghiên cứu về toán đăng trên các tạp chí uy tín trong nước và quốc tế như: “Local minimizers of semi-algebraic functions from the viewpoint of tangencies”, xuất bản trên *SIAM Journal on Optimization*, 2020; “On types of degenerate critical points of real polynomial functions”, viết cùng Feng Guo, xuất bản trên *Journal of Symbolic Computation*, 2020; “Topological invariants of plane curve singularities: Polar quotients and Lojasiewicz gradient exponents”, viết cùng Hoàng Phi Dũng và Nguyễn Hồng Đức, xuất bản trên *International Journal of Mathematics*, 2019; “The bifurcation set of a real polynomial function of two variables and Newton polygons of singularities at infinity”, viết cùng Masaharu Ishikawa và Nguyễn Tất Thắng, xuất bản trên *Journal*



Sách chuyên khảo về toán của GS Hà Huy Vui và PGS.TS Phạm Tiến Sơn do World Scientific xuất bản.

of the Mathematical Society of Japan, 2019; “Error bounds for parametric polynomial systems with applications to higher-order stability analysis and convergence rates”, viết cùng Guoyin Li, Boris Mordukhovich và Trần Thái An Nghĩa, xuất bản trên *Mathematical Programming*, 2018... Tháng 11/2019, anh (và đồng tác giả Lê Công Trình) đã vinh dự được Viện Nghiên cứu cao cấp về toán tặng giải thưởng Công trình toán học năm 2019 thuộc Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển toán học giai đoạn 2010-2020 với công trình “On tangent cones at infinity of algebraic varieties” đăng trên *Journal of Algebra and its*

#### Applications.

Riêng công trình nghiên cứu đoạt Giải thưởng Tạ Quang Bửu năm nay đã được đưa vào sách chuyên khảo “Genericity in Polynomial Optimization” (tác giả Hà Huy Vui và Phạm Tiến Sơn). Sách này nằm trong chuỗi các ấn phẩm về chủ đề Tối ưu và ứng dụng do Nhà xuất bản World Scientific xuất bản. Trong đó, GS Hà Huy Vui viết Chương 1 giới thiệu những tính chất cơ bản của hình học nửa đại số, còn PGS. TS Phạm Tiến Sơn viết 8 chương còn lại (từ Chương 2 đến Chương 9) trình bày một số vấn đề quan trọng và thời sự trong tối ưu nửa đại số. Sách được GS Jean Bernard Lasserre - Tổng biên tập của chuỗi ấn phẩm đề nghị viết.

#### Đi tìm nghiệm bài toán tối ưu nửa đại số dạng tổng quát

Công trình “*Generic properties for semialgebraic programs*” (Các tính chất tổng quát của quy hoạch nửa đại số) nghiên cứu một vấn đề cơ bản của toán học và những ứng dụng của nó. Đó là bài toán tối ưu nửa đại số: tìm giá trị nhỏ nhất của một hàm đa thức trên một tập nửa đại số (là tập được xác định bởi các phương trình và bất phương trình đa thức).

Cụ thể hơn, công trình nghiên cứu tính tổng quát của lớp các bài toán tối ưu nửa đại số, trong đó mỗi bài toán trong lớp có hàm mục tiêu là nhiễu tuyến tính của một hàm trong khi các hàm ràng buộc cố định và thỏa mãn điều kiện ràng buộc độc lập tuyến tính.

Các tác giả đã chứng minh rằng, hầu hết các bài toán trong lớp có các tính chất sau: (i) Hạn chế của hàm mục tiêu trên tập ràng buộc thỏa mãn điều kiện bức và tính chính quy tại vô hạn; (ii) Bài toán có duy nhất một nghiệm, nghiệm này thuộc một đa tạp “tích cực” duy nhất mà tại đó điều kiện bù chặt, các điều kiện đủ bậc hai, điều kiện tăng trưởng bậc hai và cận lồi Hölder toàn cục đúng; (iii) Mọi dãy cực tiểu đều hội tụ.

Các kết quả trên cùng với các định lý về biểu diễn đa thức dương trên tập nửa đại số chỉ ra rằng, với hầu hết các bài toán tối ưu nửa đại số, ta có thể xây dựng một dãy các bài toán quy hoạch nửa xác định sao cho dãy nghiệm của các bài toán này sinh ra một dãy các điểm hội đến nghiệm bài toán ban đầu sau hữu hạn bước.

Kể từ khi lên ý tưởng đến hoàn thành và xuất bản công trình trên *SIAM Journal on Optimization*, PGS.TS Phạm Tiến Sơn và GS Gue Myung Lee (đồng tác giả nghiên cứu) đã mất 3 năm để chỉ ra tính tổng quát của các bài toán tối ưu nửa đại số. Công trình này cũng mở ra hướng nghiên cứu mới như nghiên cứu giải tích biến phân (không trơn) trong khung cảnh hình học nửa đại số ✍

Hải Hằng